Série télescopique :

Une série télescopique est une série numérique dont le terme général est où

On a alors converge converge

Et en cas de convergence,

Démonstration :

Posons .

Alors

Ainsi converge converge converge converge converge

De plus, si converge, en passant à la limite on obtient :

Théorème : (Règle d’Alembert)

Soit une suite réelle, en supposant que

Si , alors

1. Si , alors diverge grossièrement.
2. Si , alors converge.
3. Si , on ne peut conclure.

Démonstration :

1. Supposons que

* Si tq

Pour ,

, tel que

Alors , donc

Ainsi est croissante et , donc

Donc diverge grossièrement.

* Si

Donc pour .

Et on conclut de même.

1. Supposons que , alors ,

Donc par définition de la limite, avec

Or donc

Alors

Donc ,

Ainsi

Or donc la série géométrique converge.

Ainsi par comparaison de SATP, converge.

1. Posons et et converge.

Posons et et converge.

Théorème de comparaison série-intégrale :

Soit et une fonction continue, décroissante et à valeurs >0.

Alors la série numérique et l’intégrale généralisée ont même nature.

Une image contenant ligne, diagramme, pente, Tracé

Description générée automatiquementDémonstration :

Soit . En sommant l’inégalité de gauche dans () pour allant de à , on trouve :

En sommant l’inégalité de droite dans () pour allant de à

D’où :

Théorème : (Séries de Riemann)

Soit La série numérique converge ssi .

Démonstration :

Si donc .

De même, si , .

Donc diverge grossièrement si .

Supposons que .

Posons , . est continue, à valeurs >0

est dérivable sur avec

Donc est décroissante.

Par le théorème de comparaison série/intégrale :

Théorème : Série définissant l’exponentielle

Soit . La série suivante converge :

Démonstration :

Soit .

Posons

Alors

* Si

Donc

Ainsi converge et sa somme vaut

* Si

Et

Donc d’après la règle de d’Alembert, converge.